

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

✚ Góc giữa 2 đường thẳng a và b là góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau a' và b' (a' song song hoặc trùng với a , b' song song hoặc trùng với b). Ký hiệu góc giữa a và b là (a, b) . ($0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$)

✚ Để tìm góc giữa 2 đường thẳng a và b , ta tìm điểm O và tiếp tục với 1 trong 3 trường hợp sau:

- Nếu O thuộc a , qua O kẻ đường thẳng $b' // b$. Khi đó $(a, b') = (a, b)$.
- Nếu O thuộc b , qua O kẻ $a' // a$. Khi đó $(a', b) = (a, b)$.
- Nếu O không thuộc a và không thuộc b . Qua O kẻ $a' // a$ và $b' // b$. Khi đó $(a', b') = (a, b)$.

✚ Để tính góc, ta áp dụng tỉ số lượng giác đối với góc nhọn trong tam giác vuông. Còn đối với tam giác thường, ta áp dụng định lí hàm cosin. Chẳng hạn, để tính góc A của tam giác ABC , ta áp dụng định lí cô-sin:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

✚ Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°

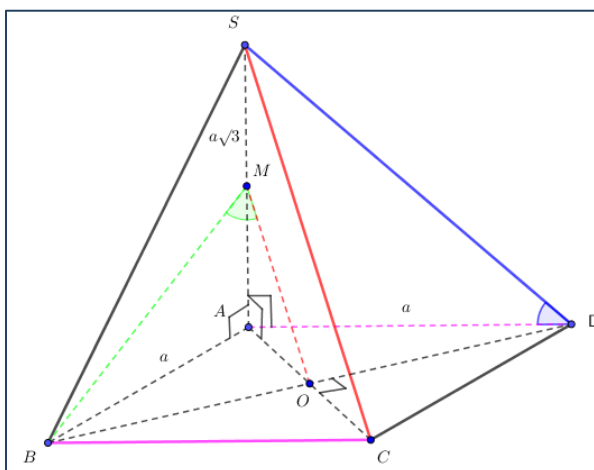
B. VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với AB , AC và AD , $SA = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của SA . Tính góc giữa các đường thẳng:

a. SD và BC

b. SC và BM

Giải



a. $BC // AD \Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = SDA$

Tam giác SDA vuông tại A . Do đó ta có:

$$\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60^\circ$$

$$\Rightarrow (SD, BC) = 60^\circ$$

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Suy ra O là trung điểm của AC . Suy ra OM là đường trung bình của tam giác SAC . Suy ra $OM // SC$.

$$OM // SC \Rightarrow (SC, BM) = (OM, BM).$$

Lưu ý: Ta chưa kết luận được góc OMB là góc giữa SC và BM vì có thể góc OMB là góc tù.

Để tính góc OMB ta dùng định lí hàm cosin:

$$OB^2 = OM^2 + BM^2 - 2OM \cdot BM \cdot \cos OMB$$

$$\Rightarrow \cos OMB = \frac{OM^2 + BM^2 - OB^2}{2OM \cdot BM}$$

-BD là đường chéo của hình vuông cạnh a nên $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OB = a\sqrt{2}/2$

-OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM = SC/2$

-Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông SAC:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{5}$$

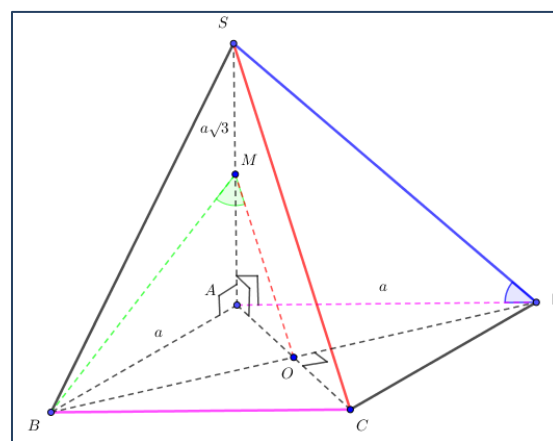
$$\Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

- Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông ABM:

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos OMB = \frac{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow OMB \approx 32^\circ \Rightarrow (SC, BM) \approx 32^\circ$$



Lưu ý: Nếu tính ra $OMB = \alpha > 90^\circ$ thì $(SC, MB) = 180^\circ - \alpha$

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=BD=CD=2a, BC=a, AD = a\sqrt{3}$. M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

a. Tính MN.

b. Tính (AB, CD)

Giải:

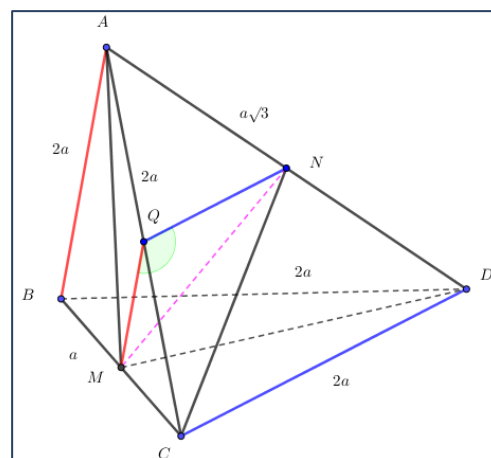
a. Tam giác ABC cân tại A có AM là trung tuyến.

Suy ra AM là đường cao. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông ABM:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2 = 4a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$



Các tam giác ABC và DBC bằng nhau nên $DM = AM = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì $AM=DM$ nên tam giác ADM cân tại M.

Suy ra trung tuyến MN cũng là đường cao.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông AMN:

$$AM^2 = AN^2 + MN^2 \Leftrightarrow MN^2 = AM^2 - AN^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3a^2 \Leftrightarrow MN = a\sqrt{3}$$

b. Gọi Q là trung điểm của AC, MQ là đường trung bình của tam giác ABC, NQ là đường trung bình của tam giác ACD. Suy ra $MQ \parallel AB, NQ \parallel CD$

$$\begin{cases} MQ \parallel AB \\ NQ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (MQ, NQ)$$

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác MNQ:

$$MN^2 = MQ^2 + NQ^2 - 2MQ \cdot NQ \cdot \cos MQN$$

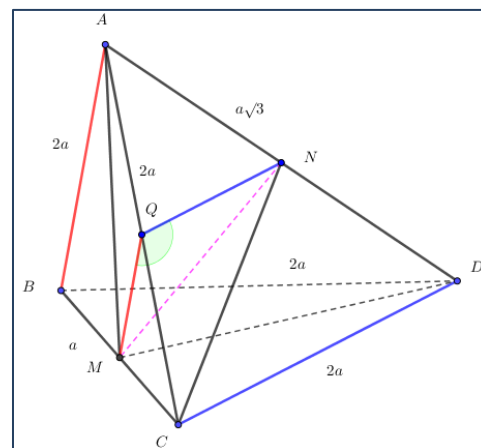
$$\Rightarrow \cos MQN = \frac{MQ^2 + NQ^2 - MN^2}{2MQ \cdot NQ}$$

MQ là đường trung bình của tam giác ABC
 $\Rightarrow MQ = a$

NQ là đường trung bình của tam giác ACD $\Rightarrow NQ = a$

$$\Rightarrow \cos MQN = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow MQN = 120^\circ \Rightarrow (AB, CD) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB. Tính góc giữa các đường thẳng:

a. SA và BC

b. MN và CD

c. SC và DM

Giải

a.

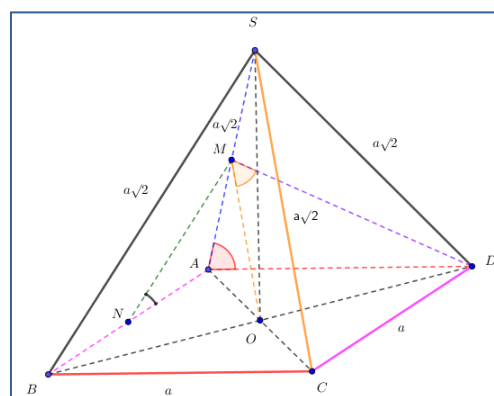
$$BC \parallel AD \Rightarrow (SA, BC) = (SA, AD)$$

MN là đường trung bình của tam giác SAB

$$\Rightarrow MN = a\sqrt{2} / 2$$

$$AM = SA / 2 = a\sqrt{2} / 2, AN = AB / 2 = a / 2$$

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác AMN:



$$AM^2 = AN^2 + MN^2 - 2AN.MN.\cos ANM$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos ANM &= \frac{AN^2 + MN^2 - AM^2}{2AN.MN} \\ &= \frac{AN^2}{2.AN.MN} = \frac{AN}{2MN} = \frac{\frac{a}{2}}{2.\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ANM \approx 69^\circ$$

$$\Rightarrow (MN, CD) \approx 69^{\circ}$$

b. $AB \parallel CD \Rightarrow (MN, CD) = (MN, AB)$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác SAD:

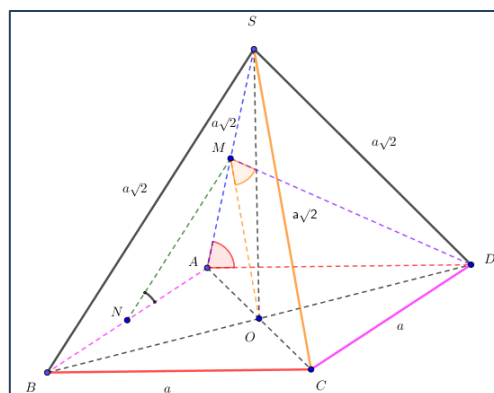
$$SD^2 = SA^2 + AD^2 - 2SA.AD.\cos SAD$$

$$\Rightarrow \cos SAD = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA \cdot AD}$$

$$= \frac{AD^2}{2 \cdot SA \cdot AD} = \frac{AD}{2SA} = \frac{a}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow SAD \approx 69^0$$

$$\Rightarrow (SA, BC) \approx 69^\circ$$



C.

OM là đường trung bình của tam giác SAC nên
OM//SC

$$\Rightarrow (SC, DM) = (OM, DM)$$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ODM:

$$OD^2 = OM^2 + DM^2 - 2OM.DM.\cos OMD$$

$$\Rightarrow \cos OMD = \frac{OM^2 + DM^2 - OD^2}{2OM \cdot MD} = \frac{DM}{2OM}$$

$$OM = SC / 2 = a\sqrt{2} / 2$$

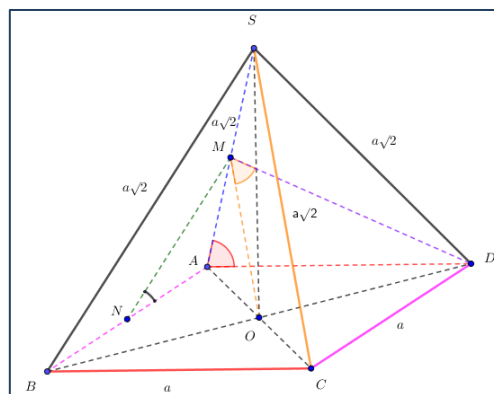
Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ADM:

$$DM^2 = AD^2 + AM^2 - 2AD.AM.\cos D\hat{A}M$$

$$\cos DAM = \cos DAS = \frac{AD^2 + AS^2 - SD^2}{2AD.AS} = \frac{AD}{2AS} = \frac{a}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow DM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = a^2$$

$$\Rightarrow DM = a$$



$$\Rightarrow \cos OMD = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow OMD = 45^\circ \Rightarrow (SC, DM) = 45^\circ$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = 2a\sqrt{6}$, K là trung điểm của SA. Tính:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a. (SD, BC) | b. (SB, CD) | c. (DK, BC) |
| d. (SD, AB) | e. (DK, AB) | f. (BK, SC) |

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = a\sqrt{6}$, M là trung điểm của SA. Tính:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a. (SD, BC) | b. (SB, CD) | c. (DK, BC) |
| d. (SD, AB) | e. (DK, AB) | f. (BK, SC) |

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 3a, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = 2a\sqrt{3}$, K là trung điểm của SA. Tính:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a. (SD, BC) | b. (SB, CD) | c. (DK, BC) |
| d. (SD, AB) | e. (DK, AB) | f. (BK, SC) |

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh 2a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{10}$. M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB. Tính góc giữa các đường thẳng:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a. SA và BC | b. SC và AB | c. SC và BD |
| d. SD và AC | e. MN và CD | f. MN và AD |
| g. CM và AD | h. BC và DN | i. AD và CN |

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SAB = 60^\circ$, $SC = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$, M là trung điểm của SA. Tính:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a. (CD, BM) | b. (CM, AD) | c. (AD, BM) |
|-------------|-------------|-------------|

Bài 6. Cho tứ diện ABCD là tứ diện đều, cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính góc giữa các đường thẳng:

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| a. AB và CD | b. AB và CM | c. AN và CD | d. AN và BD |
| e. AB và DN | f. AC và DN | g. MN và AB | h. MN và AC |